グラフのゼータ関数とドレスト光子

齋藤　正顕　(工学院大学)*

グラフは, 頂点とそれらを結ぶ辺から構成されるネットワーク図である．オフシェル科学フォーラムでも良く取り上げられる圏もグラフだと思うことができる．近年, ネットワーク科学や機械学習などでもてはやされているグラフであるが, 素朴な視点で数学や物理におけるグラフの位置づけとは何か著者はたまに考えてしまう．点とそれらを結ぶ線からなる図というあまりにも基本的な数学的対象なので, やはり何かの根本であることは確かであるが, 数学で最も根本的な整数（整数を全く使わない数学の分野はないと思う, 1 文字たりとも整数が出てこない数学の論文は多分ないと思うが, 念のため断定は控えておく）とグラフのどちらが基本的なのかなど変なことを考えている．つまり, 現在の多くの数学は整数から逃れることはできないという意味で, 整数の本質的な外側から整数を扱うことはできないように思われる．うっかり「1, 2, 3, . . . 」と数えたり,「n 個の頂点をもつグラフが . . .」 などと口走ってしまうと「終わり」である．それは整数に絡めとられた数学となってしまう．グラフや圏で整数の本質が議論できると面白いと思うが, 著者の知識では全く分からない．とりあえずは, 整数とグラフの接点や類似をゼータ関数の視点で見てみる．有名なリーマンゼータ関数 $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1$, 積は素数 p をわたる) のグラフ理論的類似としてグラフのゼータ関数（伊原ゼータ関数 [3]）がある．これはグラフ X に対してオイラー積 $Z_X(u) = \prod_{[P]}(1-u^{\ell(P)})^{-1}$ で定義される．ここで u は絶対値が十分小さいとし, 積は X 上の素サイクル $[P]$ をわたる．素サイクルは素数のグラフ理論的類似物である．グラフがツリー（サイクルを持たないグラフ）だと点からその点自身へ戻る閉路は長くなる．サイクルがあると "近道" があって便利だが, 同じ頂点数のツリーに比べて辺の個数が多くなる．ツリーのように辺の個数が少なく, かつ適度にサイクルが存在するグラフがネットワークとして効率が良い．そのようなバランスの良いグラフとしてラマヌジャングラフがある．グラフのゼータ関数は, グラフ X がどの程度サイクルを含むか, つまりどの程度ツリーからかけ離れているかを表している．ちなみに, ツリーのゼータ関数は 1 であり, n 頂点のサイクル (つまり n 角形) のゼータ関数は $1/(1-u^n)^2$ である．各頂点から同じ個数の辺が出ている正則グラフに対しては, グラフのゼータ関数がリーマン予想の類似を満たすことと, ラマヌジャングラフ (理想的なネットワーク) であることが同値になる．これは裏を返すと, リーマン予想を満たさない「ダメなグラフ」があるということで, むしろそのようなグラフの方が多い．しかし, 一方で疎な巨大ランダム正則グラフの多くはラマヌジャングラフっぽくなる（つまり良いネットワークになる）という Alon 予想（現在は定理）があるので注意を要する．自然で良いものは案外周りにありふれているということなのかもしれない．この視点を用いると本来のリーマン予想は（成り立っていると思うと）, 整数 (の集合) $\mathbb{Z}$ が何らかの意味で「良い "整数"」であることを示唆する．つまり, 通常の整数 $\mathbb{Z}$ がラマヌジャングラフに対応して，　それらを含む "整数" のような概念があると面白いなと思う．通常我々が扱う整数はラマヌジャングラフのように良い整数で, 気が付いていないだけで「ダメな "整数"」があるかもしれない . . . . いささか暴走してしまったので, この辺でお詫びする．まじめに発表してはまずいと思うが, 個人的にそのような想像をめぐらして楽しんでいるだけでなのでどうかご容赦い

* e-mail: saito.seiken@cc.kogakuin.ac.jp

ただければ幸いである．最後にドレスト光子とグラフのゼータ関数についての展望について述べたい. 最近, 大津氏や瀬川氏らの研究により, 2次元あるいは3次元格子上のドレスト光子の量子ウォークによるモデルが提案されている [6]. 一方で, グラフ上の量子ウォークを定めるユニタリ行列の特性多項式は, グラフのゼータ関数で表されるということが知られている (今野-佐藤の定理). 少し詳しく述べると, グラフのゼータ関数は２つの行列式表示をもつが, その証明方法を量子ウォークのユニタリ行列の特性多項式にも適用することができ, 見通しの良い形にすることができる (詳しくは [4] の第10章を参照). これに関連して, ２つの（強正則）グラフが同型であることと, グラフ上の量子ウォークのユニタリ行列の３乗の正台のなす行列の固有値が同じであることが同値であるという予想がある [1]. これを受けて, 瀬川氏らによる Grover walk のユニタリ行列の n 乗の正台に関する構造定理が得られている [5]. そこでは, やはりグラフのゼータ関数を用いた議論がなされている．残念ながら, この予想には, その後反例が見つかったそうである [2]. しかし, 量子ウォークを用いて, ２つのグラフの厳密な同型は決定できなくても実用上必要な程度に区別することはできるかもしれない. 例えば, 与えられた２つの格子（やグラフ）上のドレスト光子のダイナミクスを観察することで, その２つが（実用に耐えうる程度に）“同じ”か否かを決定する問題を考えてみることは興味深いと思われる．またこれに関連して, ドレスト光子を説明する量子ウォークのモデルを定めるユニタリ行列 (やその n 乗の正台行列) の特性多項式とグラフのゼータ関数の関係を探ることも興味深いと思われる.

謝辞

量子ウォークとグラフの同型問題に関する有益な情報を教えていただいた瀬川悦生氏に感謝いたします.

参考文献

[1] D. Emms, E. R. Hancock, S. Severini, R. C. Wilson, A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, Electron. J. Combin. 13 (2006), no. 1, Research Paper 34, 14 pp.

[2] C. Godsil, K. Guo, T. G. J. Myklebust, Quantum walks on generalized quadrangles, Electron. J. Combin. 24 (2017), no. 4, Paper No. 4.16, 6 pp.

[3] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 219–235.

[4] 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版, 2014.

[5] N. Konno, I. Sato, E. Segawa, Phase measurement of quantum walks: application to structure theorem of the positive support of the Grover walk, Electron. J. Combin. 26 (2019), no. 2, Paper No. 2.26, 25 pp.

[6] M. Ohtsu, A Quantum Walk Model for Describing the Energy Transfer of a Dressed Photon, preprint, 2021.